HUOKOISET JOUKOT

TUOMAS SAHLSTEN

Kandidaatintutkielma
Opiskelijanumero: 013310787

Sisällysluettelo

Johdanto

Matematiikassa esiintyy usein joukkoja, jotka ovat hyvin reikäisiä ja harvoja. Tunnetuimpia esimerkkejä näistä ovat mm. monet fraktaalit. Kuitenkin fraktaalit ovat usein kovin vaikeasti lähestyttäviä perinteisillä konsteilla. Esimerkiksi niiden "mittaa" tutkittaessa tavalliset pinta-alan tai tilavuuden suureet eivät oikein kerro paljoa joukon hienorakenteesta ja pienen mittakaavan struktuurista. Niitä tutkittaessa onkin siis välttämätöntä käyttää työkaluja, jotka eivät hukkaa hienorakenteen informaatiota. Eräs tähän soveltuva työkalu on *huokoisuus*. Huokoisuus on alunperin fysikaalinen suure, joka ilmaisee kuinka reikäinen tutkittava materiaali on. Tästä ideasta onkin rakennettu matematiikkaan vastaava täsmällinen käsite joukoille. Tässä tutkielmassa pyrimme määrittelemään $\mathbb{R}^n$:n *huokoisen joukon* niin, että se vastaa tätä fysikaalista tulkintaa. Tutkielmassa lisäksi esitämme ja todistamme huokoisten joukkojen perusominaisuuksia ja osoitamme, että esimerkiksi Cantorin 1/3-joukko ja Sierpinskin kolmio ovat huokoisia. Lisäksi lopussa esitämme hieman ajankohtaisia painopisteitä huokoisuuden tutkimuksesta matematiikassa.

Huokoisten joukkojen ideoita esiintyi ensimmäistä kertaa Denjoyn artikkelissa [3] vuodelta 1920. Kuitenkin itse käsite *huokoinen joukko* määriteltiin Dolženkon artikkelissa [4] vuonna 1967. Dolženko keskittyi artikkelissaan erityisesti ns. *σ-huokoisiin joukkoihin*, jotka ovat numeroituvia yhdisteitä huokoisista joukoista. Huokoiselle joukolle esiintyy nykyään useita erinäköisiä määritelmiä. Määritelmät muistuttavat toisiaan, mutta lähtökohdista johtuen osa määritelmistä on vahvempia kuin toiset. Olemme tässä tutkielmassa valinneet määritelmäksi eräänlaisen *tasaisen huokoisuuden*, jonka teoriaa löytyy mm. artikkelista [2]. Tasaisesti huokoisilta joukoilta vaaditaan, että jokaisessa joukon pisteen ympäristössä on samankokoisia reikiä kuin minkä tahansa muun joukon pisteen ympäristöissä. Kuitenkin tutkimuksessa huomattavasti yleisempi määritelmä joukon huokoisuudelle on ns. *pisteittäinen huokoisuus*. Pisteittäin huokoisen joukon jokainen yksittäinen piste on erityisasemassa ja toisin kuin tasaisessa huokoisuudessa, emme vaadi minkäänlaista yhtenäistä rajaa reikien koolle koko joukossa. Pisteittäin määritelty huokoisuus antaa siis heikomman kriteerin joukon huokoisuudelle kuin tasainen huokoisuus.

Etuna on kuitenkin ilmennyt mm. se, että lähtökohdittain se antaa enemmän informaatiota siitä mitä tapahtuu huokoisen joukon pisteiden ympäristöissä pienellä skaalalla. Pisteittäisen huokoisuuden määritelmän pohjalta johdettua teoriaa ja sen yleistettyä versiota metrisiin avaruuksiin löytyy mm. artikkeleista [8], [9], [10], [14], [15], [16] ja [17].

1. Huokoiset joukot

Tarkoitamme seuraavassa merkinnällä $B(x,r)$, missä $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$, avaruuden $\mathbb{R}^n$ x-keskistä ja r-säteistä avointa kuulaa [20].

Määritelmä 1.1. *Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on* ***huokoinen****, jos on olemassa $0 < \rho \leq 1$ ja $r_0 > 0$, joille kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $0 < r \leq r_0$ on olemassa $y \in \mathbb{R}^n$, joka toteuttaa ehdon*

$$B(y, \rho r) \subset B(x,r) \setminus A. \tag{1}$$

Tämä määritelmä esiintyy artikkelissa [2]. Kutsumme ehtoa (1) *huokoisuusehdoksi.* Jos tiedämme vakiot ρ ja r_0, joilla määritelmän 1.1 ehto joukon A huokoisuudelle toteutuu, niin kutsumme joukkoa A myös (ρ, r_0)*-huokoiseksi.*

Huomautus 1.2. Jos korvaamme määritelmässä 1.1 ehdon "*kaikilla* $x \in \mathbb{R}^n$" ehdolla "*kaikilla* $x \in A$," niin saamme yhtäpitävän huokoisen joukon määritelmän.

Todistus. Osoitetaan yhtäpitävyys.
Oletetaan ensin, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on huokoinen kuten määritelmässä 1.1. Nyt siis on olemassa $0 < \rho \leq 1$ ja $r_0 > 0$, joille kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $0 < r \leq r_0$ on olemassa $y \in \mathbb{R}^n$, joka toteuttaa ehdon $B(y, \rho r) \subset B(x,r) \setminus A$. Koska tämä pätee kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, niin se pätee erityisesti kaikilla $x \in A$.
Oletetaan nyt kääntäen, että on olemassa $0 < \rho \leq 1$ ja $r_0 > 0$, joille kaikilla $x \in A$ ja $0 < r \leq r_0$ on olemassa $y \in \mathbb{R}^n$, joka toteuttaa ehdon $B(y, \rho r) \subset B(x,r) \setminus A$. Osoitetaan, että tällöin A on $(\rho/2, r_0)$-huokoinen, kuten määritelmässä 1.1. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja $0 < r \leq r_0$ mielivaltaisia. Jos $x \in A$, niin oletuksen nojalla löytyy $y \in \mathbb{R}^n$, joka toteuttaa huokoisuusehdon. Voidaan siis olettaa, että $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Tarkastellaan kahta eri tapausta.
Oletetaan ensin, että $A \cap B(x, r/2) = \emptyset$. Asetetaan $y = x$. Tällöin $B(y, \rho r/2) = B(x, \rho r/2)$. Toisaalta koska $\rho/2 \leq 1/2$, niin $B(x, \rho r/2) \subset B(x, r/2)$. Näin ollen $B(y, \rho r/2) \subset B(x, r/2)$. Toisaalta oletuksen nojalla $A \cap B(x, r/2) = \emptyset$, joten $B(y, \rho r/2) \subset B(x, r/2) \setminus A$. Toisaalta $B(x, r/2) \subset B(x, r)$, joten $B(x, r/2) \setminus A \subset B(x,r) \setminus A$. Siispä $B(y, \rho r/2) \subset B(x,r) \setminus A$.
Oletetaan sitten, että $A \cap B(x, r/2) \neq \emptyset$. Nyt voidaan valita $z \in A \cap B(x, r/2)$. Tällöin $z \in A$. Koska $r/2 < r \leq r_0$, niin todistuksen alun oletuksen nojalla on olemassa $y \in \mathbb{R}^n$, jolla

$B(y, \rho r/2) \subset B(z, r/2) \setminus A$. Osoitetaan nyt, että $B(z, r/2) \subset B(x, r)$. Olkoon $v \in B(z, r/2)$ mielivaltainen. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla $|v - x| \leq |v - z| + |z - x| < r/2 + r/2 = r$, joten $v \in B(x, r)$. Siispä $B(z, r/2) \subset B(x, r)$. Tällöin myös $B(z, r/2) \setminus A \subset B(x, r) \setminus A$. Näin ollen $B(y, \rho r/2) \subset B(x, r) \setminus A$. Molemmissa tapauksissa löydettiin $y \in \mathbb{R}^n$, joka toteuttaa huokoisuusehdon. Näin ollen A on huokoinen. $\square$

Voimme siis vastaisuudessa käyttää molempia määritelmiä tilanteen mukaan. Huomattavaa kuitenkin on se, että jos esimerkiksi osoitamme, että joukko toteuttaa vakioilla ρ ja r_0 huomautuksen 1.2 kriteerin huokoisuudelle, niin todistuksen formuloinnin nojalla joukko ei ole (ρ, r_0)-huokoinen, vaan $(\rho/2, r_0)$-huokoinen. Emme kuitenkaan kiinnitä tässä tutkielmassa paljoa huomiota niihin täsmällisiin vakioihin, joilla joukko toteuttaa huokoisuuskriteerin vaan tarvitsemme vain tiedon siitä, että joukko ylipäänsä on huokoinen.

Seuraavassa osoitamme, että huokoisuus periytyy myös osajoukoilleen, leikkauksille ja sulkeumalleen. Näiden avulla tutkimme huokoisten joukkojen perusominaisuuksia ja johdamme muutamia esimerkkejä.

Lause 1.3. *Huokoisten joukkojen osajoukot ovat huokoisia.*

Todistus. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ (ρ, r_0)-huokoinen ja $B \subset A$. Osoitetaan, että B on myös (ρ, r_0)-huokoinen. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja $0 < r \leq r_0$ mielivaltaisia. Koska A on huokoinen, niin on olemassa $y \in \mathbb{R}^n$, jolla $B(y, \rho r) \subset B(x, r) \setminus A$. Toisaalta $B \subset A$, joten edellä oleva $B(x, r) \setminus A \subset B(x, r) \setminus B$. Näin ollen $B(y, \rho r) \subset B(x, r) \setminus B$. Siispä valittu y toteuttaa huokoisuusehdon. Näin ollen joukko B on huokoinen. $\square$

Lause 1.4. *Huokoisten joukkojen mielivaltaiset leikkaukset huokoisia.*

Todistus. Olkoon joukot $A_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$, huokoisia, missä I on epätyhjä joukko. Kiinnitetään $k \in I$. Nyt leikkauksen määritelmän mukaan $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_k$. Koska A_k on huokoinen, niin edellisen lauseen nojalla sen kaikki osajoukot ovat huokoisia. Erityisesti siis leikkaus $\bigcap_{i \in I} A_i$ on huokoinen. $\square$

Tämä lause olisi siis pätenyt lievemmässäkin muodossa: jos missä tahansa kokoelmassa $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ on ainakin yksi huokoinen joukko, niin leikkaus $\bigcap \mathcal{K}$ on huokoinen.

Lause 1.5. *Huokoisen joukon sulkeuma on huokoinen.*

Todistus. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ (ρ, r_0)-huokoinen. Osoitetaan seuraavassa, että sulkeuma $\bar{A}$ on myös (ρ, r_0)-huokoinen. Olkoon siis $x \in \mathbb{R}^n$ mielivaltainen ja oletetaan, että $0 < r \leq r_0$. Koska A on (ρ, r_0)-huokoinen, niin on olemassa $y \in \mathbb{R}^n$, jolla $B(y, \rho r) \subset B(x, r) \setminus A$. Osoitetaan, että myös pätee $B(y, \rho r) \subset B(x, r) \setminus \bar{A}$. <u>Vastaoletus</u>: $B(y, \rho r) \cap \bar{A} \neq \emptyset$.

Voidaan siis valita $z \in \bar{A}$, jolla $|y-z| < \rho r$. Tällöin luku $\varepsilon := \rho r - |y-z|$ on positiivinen. Nyt siis $B(z,\varepsilon)$ hyvinmääritelty pisteen z epätyhjä ympäristö. Tällöin koska lisäksi $z \in \bar{A}$, niin sulkeuman määritelmän nojalla $B(z,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Voidaan siis valita $z' \in A$, jolla $|z'-z| < \varepsilon$. Nyt kolmioepäyhtälön nojalla $|z'-y| \leq |z'-z| + |z-y| < \varepsilon + |z-y| = \rho r$. Siispä $z' \in B(y,\rho r)$, joten pallo $B(y,\rho r)$ kohtaa joukon A. Tämä on ristiriidassa oletuksen $B(y,\rho r) \subset B(x,r) \setminus A$ kanssa. □

Seuraavassa tutkimme huokoisten joukkojen (n-ulotteista) Lebesguen ulkomittaa m_n^* ja mitallisuutta. Niiden määritelmät löytyvät esimerkiksi lähteestä [5].

Muistutamme, että piste $z \in \mathbb{R}^n$ on mitallisen joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *tiheyspiste*, jos

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{m_n(B(z,r) \cap A)}{m_n(B(z,r))} = 1.$$

Tiheyspisteiden ominaisuuksia ja käyttötarkoituksia löytyy mm. lähteistä [6] ja [7].

Lause 1.6. *Mitallisella huokoisella joukolla ei ole tiheyspisteitä.*

Todistus. Olkoon A (ρ, r_0)-huokoinen ja mitallinen. Vastaoletus: on olemassa joukon A tiheyspiste $z \in \mathbb{R}^n$. Kiinnitetään nyt $0 < r \leq r_0$. Koska A on huokoinen, niin tällöin on olemassa $y \in \mathbb{R}^n$, jolla $B(y,\rho r) \subset B(z,r) \setminus A$. Nyt joukko-operaatioiden avulla nähdään, että $B(z,r) \cap A \subset B(z,r) \setminus B(y,\rho r)$. Tällöin Lebesguen mitan monotonisuuden nojalla

$$\begin{aligned}
\frac{m_n(B(z,r) \cap A)}{m_n(B(z,r))} &\leq \frac{m_n(B(z,r) \setminus B(y,\rho r))}{m_n(B(z,r))} \\
&= \frac{m_n(B(z,r)) - m_n(B(y,\rho r))}{m_n(B(z,r))} \\
&= 1 - \frac{m_n(B(y,\rho r))}{m_n(B(z,r))} = 1 - \frac{m_n(y + B(0,\rho r))}{m_n(z + B(0,r))} \\
&= 1 - \frac{m_n(B(0,\rho r))}{m_n(B(0,r))} = 1 - \frac{m_n(\rho r B(0,1))}{m_n(r B(0,1))} \\
&= 1 - \frac{(\rho r)^n m_n(B(0,1))}{r^n m_n(B(0,1))} = 1 - \rho^n.
\end{aligned}$$

Lopun yhtälöissä käytämme Lebesguen mitan siirtoinvarianssia ja ominaisuutta $m_n(\lambda B) = \lambda^n m_n(B)$, missä $\lambda > 0$ ja $B \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen. Nyt rajankäynnillä saadaan

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{m_n(B(z,r) \cap A)}{m_n(B(z,r))} \leq 1 - \rho^n < 1. \qquad \text{(sillä } \rho > 0\text{)}$$

Toisaalta z on joukon A tiheyspiste, joten tämä on ristiriidassa tiheyspisteen määritelmän kanssa. Näin ollen joukolla A ei ole tiheyspisteitä. □

Seuraus 1.7. *Avaruuden $\mathbb{R}^n$ huokoiset joukot ovat nollamittaisia ja mitallisia.*

Todistus. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ huokoinen. Osoitetaan ensin, että sen sulkeuma $\bar{A}$ on nollamittainen. Koska sulkeuma on suljettu joukko, niin $\bar{A}$ on mitallinen. Tällöin Lebesguen tiheyspistelauseen [7, seuraus 3.3] nojalla

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{m_n(B(x,r) \cap \bar{A})}{m_n(B(x,r))} = 1 \tag{2}$$

melkein kaikilla $x \in \bar{A}$. Vastaoletus: $m_n(\bar{A}) > 0$. Tällöin siis on olemassa $z \in \bar{A}$, joka toteuttaa ehdon (2). Näin ollen piste z on joukon $\bar{A}$ tiheyspiste. Tämä on ristiriidassa edellisen lauseen kanssa, sillä koska A on huokoinen, niin lauseen 1.5 nojalla sen sulkeuma on huokoinen, joten sillä ei voi olla tiheyspisteitä. Siispä $m_n(\bar{A}) = 0$. Koska $A \subset \bar{A}$, niin ulkomitan monotonisuuden nojalla $m_n^*(A) \leq m_n(\bar{A})$. Näin ollen $m_n^*(A) = 0$. Koska A on nollamittainen, niin lauseen [5, lause 1.22] nojalla joukko A on mitallinen. Väite on siis todistettu jokaiselle $\mathbb{R}^n$:n huokoiselle joukolle. □

Huokoiset joukot ovat siis ”pieniä” mittateoreettisessa mielessä. Huomataan, että kaikki edellä esitetyt huokoisten joukkojen ominaisuudet lukuunottamatta nollamittaisuutta on luonnollisesti yleistettävissä metrisiin avaruuksiin. Emme ole tarvinneet lainkaan informaatiota $\mathbb{R}^n$:n erityisistä geometrisista ominaisuuksista paitsi nollamittaisuuden kohdalla. Kuitenkin jos oletamme, että sekä käyttämämme metrinen avaruus että annettu mitta ovat ns. *tuplaavia*, niin voidaan osoittaa kaikki kyseisen metrisen avaruuden huokoiset joukot myös nollamittaisiksi Lebesguen tiheyspistelauseella. Metrisen avaruuden huokoisista joukoista ja tuplaavuudesta löytyy tutkimusta mm. artikkeleista [11] ja [12].

Seuraavassa tutkimme hieman mitkä joukot ovat huokoisia $\mathbb{R}^n$:ssä. Muistutamme, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *tiheä* avaruudessa $\mathbb{R}^n$, jos sen sulkeuma $\bar{A} = \mathbb{R}^n$.

Lause 1.8. *Avaruuden $\mathbb{R}^n$ tiheät osajoukot eivät voi olla huokoisia.*

Todistus. Vastaoletus: Oletetaan, että on olemassa tiheä ja huokoinen $A \subset \mathbb{R}^n$. Koska $\bar{A} = \mathbb{R}^n$ ja lauseen 1.5 mukaan huokoisten joukkojen sulkeumat ovat huokoisia, niin $\mathbb{R}^n$ on huokoinen. Tämä tuottaa ristiriidan, sillä suoraan huokoisuuden määritelmästä nähdään ettei avaruus $\mathbb{R}^n$ voi olla huokoinen joukko. □

Lause 1.9. *Äärelliset joukot ovat huokoisia.*

Todistus. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ äärellinen. Tällöin $A = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ jollain $k \in \mathbb{N}$. Merkitään $r_0 = \min\{|x_i - x_j| : i \neq j\}$. Tällöin

$r_0 > 0$. Osoitetaan, että vakiot $\rho = 1/2$ ja r_0 toteuttavat huomautuksen 1.2 yhtäpitävän ehdon joukon A huokoisuudelle. Olkoon siis $x \in A$ mielivaltainen ja $0 < r \leq r_0$. Valitaan nyt jokin $y \in \mathbb{R}^n$, jolla $|y - x| = r/2$ ja tutkitaan toteutuuko $B(y, r/2) \subset B(x, r) \setminus A$. Olkoon $z \in B(y, r/2)$ mielivaltainen. Nyt kolmioepäyhtälön nojalla $|z-x| \leq |z-y|+|y-x| < r/2+r/2 = r$, joten $z \in B(x, r)$. Näin ollen $B(y, r/2) \subset B(x, r)$. Koska r_0 on pienin etäisyys joukon A pisteiden välillä ja $r \leq r_0$, niin $B(y, r/2) \cap A = \emptyset$. Siispä $B(y, r/2) \subset B(x, r) \setminus A$. $\square$

Äärelliset joukot ovat erityisesti numeroituvia joukkoja. Kuitenkaan kaikki numeroituvat joukot eivät ole huokoisia. Esimerkiksi rationaaliluvut ovat tiheässä reaaliakselilla, joten lauseen 1.8 nojalla rationaalilukujen joukko ei voi olla huokoinen.

Määrittelemme, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *harva*, jos sen sulkeuman sisäpisteiden joukko on tyhjä, eli $\mathrm{int}\bar{A} = \emptyset$. Seuraavassa osoitamme, että huokoiset joukot ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ harvoja osajoukkoja.

Lemma 1.10. *Huokoinen joukko ei sisällä epätyhjää avointa joukkoa.*

Todistus. Olkoon A (ρ, r_0)-huokoinen. Vastaoletus: on olemassa epätyhjä ja avoin $U \subset A$. Koska U on epätyhjä, niin voimme valita $x \in U$. Koska U on avoin, niin määritelmän mukaan on olemassa $\varepsilon > 0$, jolla $B(x, \varepsilon) \subset U$. Olkoon nyt $0 < r \leq \min\{r_0, \varepsilon\}$ mielivaltainen. Koska A on huokoinen, niin määritelmän mukaan pisteelle x ja säteelle r on olemassa $y \in \mathbb{R}^n$, jolla $B(y, \rho r) \subset B(x, r) \setminus A$. Toisaalta koska $B(x, r) \subset B(x, \varepsilon) \subset U \subset A$, niin $B(x, r) \setminus A = \emptyset$. Näin ollen $B(y, \rho r) \subset \emptyset$. Toisaalta $y \in B(y, \rho r)$, joten $y \in \emptyset$. Tämä on ristiriidassa tyhjän joukon määritelmän kanssa. Siispä huokoinen joukko ei sisällä epätyhjää avointa joukkoa. $\square$

Lause 1.11. *Huokoinen joukko on harva.*

Todistus. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ huokoinen. Vastaoletus: A ei ole harva. Nyt määritelmän mukaan sulkeuman sisäpisteiden joukko $\mathrm{int}\bar{A} \neq \emptyset$. Voimme siis valita pisteen $x \in \mathrm{int}\bar{A}$. Nyt sisäpisteiden joukon määritelmän mukaan on olemassa $r > 0$, jolla $B(x, r) \subset \bar{A}$. Tämä on ristiriidassa edellisen lemman 1.10 kanssa, sillä koska A on huokoinen, niin lauseen 1.5 nojalla sen sulkeuma $\bar{A}$ on huokoinen, joten se ei voi sisältää epätyhjää avointa joukkoa. Näin ollen A on harva. $\square$

Tämä lause ei päde kääntäen. Esimerkiksi positiivimittainen Cantorin joukko on reaaliakselin harva osajoukko [1]. Tällöin seurauksen 1.7 nojalla se ei voi olla huokoinen.

Huokoisten joukkojen numeroituvia yhdisteitä kutsutaan kirjallisuudessa *σ-huokoisiksi joukoiksi*. Jokainen huokoinen joukko on triviaalisti σ-huokoinen. Kuitenkaan käänteinen ei päde. Esimerkiksi rationaaliluvut on numeroituva yhdiste yksiöistä, jotka ovat erityisesti äärellisinä joukkoina huokoisia. Näin ollen rationaalilukujen joukko on σ-huokoinen. Toisaalta rationaalilukujen joukko on tiheä reaaliakselilla, joten se ei voi olla huokoinen. Emme keskity tässä tutkielmassa σ-huokoisiin joukkoihin; niiden ominaisuuksia on tutkittu mm. artikkeleissa [4] ja [21].

Edellä on annettu esimerkkejä vain numeroituvista huokoisista joukoista. Ovatko sitten kaikki huokoiset joukot numeroituvia? Vastaus tähän on kielteinen. Seuraavassa osoitamme, että ylinumeroituvat Cantorin 1/3-joukko ja Sierpinskin kolmio ovat huokoisia joukkoja. Näiden määritelmät ja ominaisuuksia on kattavasti selitetty lähteissä [6], [7], [13], [14] ja [19].

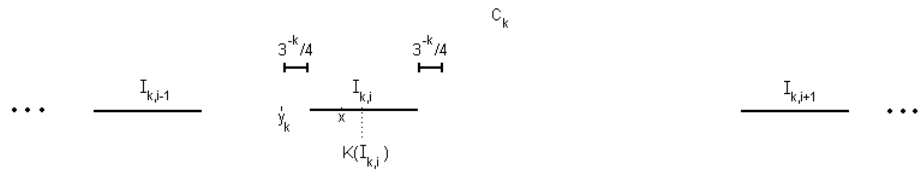
Esimerkki 1.12. Tarkastellaan Cantorin 1/3-joukkoa $C(1/3) \subset \mathbb{R}$. Merkitään jokaisella $k \in \mathbb{N}$ Cantorin joukon konstruktiossa k:ssa vaiheessa annettua janayhdistettä

$$C_k = \bigcup_{i=1}^{2^k} I_{k,i},$$

missä jokaisen janan $I_{k,i}$ pituus on 3^{-k}. Nyt siis $C(1/3) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k$. Osoitetaan, että $C(1/3)$ toteuttaa vakioilla $\rho = 1/12$ ja $r_0 = 1$ huomautuksen 1.2 ehdon huokoisuudelle. Olkoon $x \in C(1/3)$ ja $0 < r \leq 1$ mielivaltainen. Kiinnitetään nyt $k \in \mathbb{N}$, jolle $3^{-k} \leq r \leq 3^{-k+1}$. Nyt Cantorin joukon määritelmän nojalla $x \in C_k$, joten jollain $i \in \{1, 2, ..., 2^k\}$ on $x \in I_{k,i}$. Käytetään seuraavassa merkintää $K(I_{k,i})$ janan $I_{k,i}$ keskipisteelle. Asetetaan

$$y_k = \begin{cases} K(I_{k,i}) + 3^{-k} \cdot 3/4 & \text{jos } x \geq K(I_{k,i}) \\ K(I_{k,i}) - 3^{-k} \cdot 3/4 & \text{jos } x < K(I_{k,i}) \end{cases}$$

Tällöin riippuen x:n sijainnista janalla $I_{k,i}$ on y_k joko janan $I_{k,i}$ vasemman tai oikeanpuoleisessa alueessa etäisyydellä $3^{-k}/4$ janasta $I_{k,i}$. Huomataan, että tällöin pisteen y_k etäisyys janoista $I_{k,i+1}$ ja $I_{k,i-1}$ on suurempaa kuin tämä etäisyys $3^{-k}/4$.



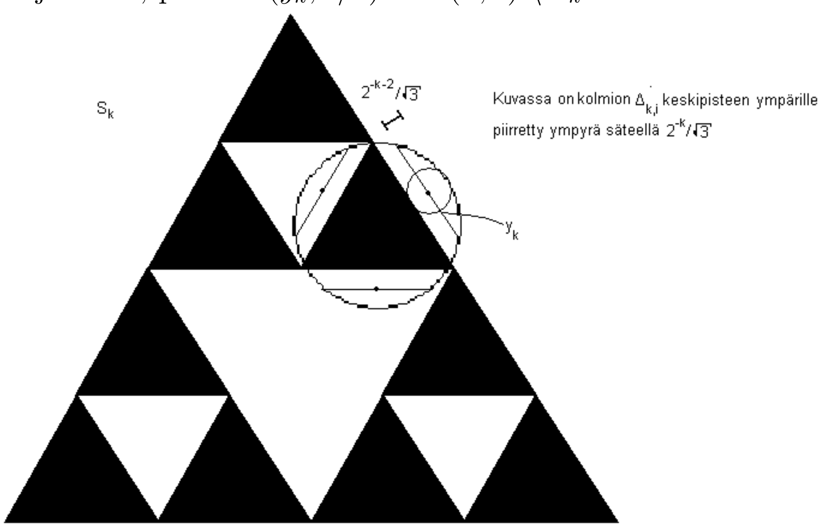
Nyt $B(y_k, 3^{-k}/4) \cap C_k = \emptyset$. Toisaalta koska $3^{-k} \leq r \leq 3^{-k+1}$, niin $3^{-k}/12 \leq r/12 \leq 3^{-k+1}/12 = 3^{-k}/4$. Siispä erityisesti $B(y_k, r/12) \cap C_k = \emptyset$. Valitaan nyt mielivaltainen $z \in B(y_k, 3^{-k}/4)$. Nyt kolmioepäyhtälön nojalla $|z - x| \leq |z - y_k| + |y_k - x| < 3^{-k}/4 + 3^{-k} \cdot 3/4 = 3^{-k} \leq r$, joten $z \in B(x, r)$. Näin ollen $B(y_k, 3^{-k}/4) \subset B(x, r)$. Toisaalta $r/12 \leq$

$3^{-k}/4$, joten $B(y_k, r/12) \subset B(y_k, 3^{-k}/4)$. Siispä $B(y_k, r/12) \subset B(x, r)$. Näin ollen $B(y_k, r/12) \subset B(x, r) \backslash C_k$. Toisaalta koska $C(1/3) \subset C_k$, niin $B(x, r) \backslash C_k \subset B(x, r) \backslash C(1/3)$. Siispä $B(y_k, r/12) \subset B(x, r) \backslash C(1/3)$. Koska r on mielivaltainen, niin $C(1/3)$ on huomautuksen 1.2 nojalla huokoinen.

Esimerkki 1.13. Tarkastellaan nyt Sierpinskin kolmiota $S \subset \mathbb{R}^2$. Merkitään jokaisella $k \in \mathbb{N}$ Sierpinskin kolmion konstruktiossa k:ssa vaiheessa annettua kolmioyhdistettä

$$S_k = \bigcup_{i=1}^{3^k} \Delta_{k,i},$$

missä jokainen kolmio $\Delta_{k,i}$ on tasasivuinen kolmio sivun pituutena 2^{-k}. Nyt siis $S = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k$. Osoitetaan, että S toteuttaa jälleen vakioilla $\rho = 1/8$ ja $r_0 = 1$ huomautuksen 1.2 ehdon huokoisuudelle. Olkoon $x \in S$ ja $0 < r \leq 1$. Kiinnitetään $k \in \mathbb{N}$, jolle $2^{-k}/\sqrt{3} \leq r \leq 2^{-k+1}/\sqrt{3}$. Tällöin Sierpinskin kolmion määritelmän nojalla $x \in S_k$, joten jollain $i \in \{1, 2, ..., 3^k\}$ on $x \in \Delta_{k,i}$. Esitetään seuraavassa idea miten osoitamme joukon S huokoiseksi. Kuten Cantorin joukon tapauksessa pisteen $y_k \in \mathbb{R}^2$ valinta riippuu missä päin kolmiota $\Delta_{k,i}$ piste x sijaitsee. Kuitenkin kuvan perusteella huomataan, että riippuen x:n sijainnista jos valitsemme pisteen y_k sopivasti joltain kuvan ympyrän sisällä olevilta janoilta, pätee $B(y_k, r/8) \subset B(x, r) \setminus S_k$.



Toisaalta koska $S \subset S_k$, niin $B(x, r) \setminus S_k \subset B(x, r) \setminus S$. Siispä $B(y_k, r/8) \subset B(x, r) \setminus S$. Koska r on mielivaltainen, niin S on huomautuksen 1.2 nojalla huokoinen.

2. Tutkimus nykyään

Cantorin joukko ja Sierpinskin kolmio ovat esimerkkejä yksinkertaisista fraktaaleista. Kuitenkaan kaikki fraktaalit eivät ole huokoisia. Esimerkiksi jos emme pidäkään Cantorin joukon konstruktiossa skaalauskerrointa vakiona, vaan vaihdamme Cantorin joukon konstruktiossa skaalauskerrointa sopivasti pienemmäksi joka askeleella, niin muodostuva joukko on positiivimittainen [13]. Näin ollen seurauksen 1.7 nojalla se ei siis voi olla huokoinen. Siksi sopiikin kysyä mitä oikeastaan vaadimme fraktaaleilta tai ylipäänsä joukoilta, jotta ne olisivat huokoisia? Jotta tähän voisi vastata, olisi ensisijaisesti oleellista tuntea huokoisten joukkojen yleinen geometria. Esimerkiksi miten huokoisuuden määritelmässä annettu kerroin ρ tulkitaan? Miten tilanne muuttuu jos se on suuri tai pieni? Näyttääkö joukko jotenkin erilaiselta mitä pienemmillä ρ:n arvoilla joukko toteuttaa huokoisuusehdon?

Mittateoriassa on kehitetty ns. *Hausdorffin-*, *Minkowskin-* ja *pakkausdimensioiden* käsitteet [16]. Nämä ovat suureita, jotka liittävät joukkoihin eräänlaisen ”dimension”. Sen voi käsittää kuten tyypillisen ulottuvuuden käsitteen sillä erotuksella, että tämä dimensio antaa enemmän informaatiota tutkitun joukon hienorakenteesta. Voisi siis olettaa, että jos tiedämme joukon huokoiseksi, niin se näkyy jotenkin vastaavan dimension arvossa. Nykyään onkin paljon tutkittu tätä yhteyttä. Esimerkiksi O. Martio ja M. Vuorinen osoittivat artikkelissa [15], että jos joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on huokoinen jollain vakiolla $\rho > 0$, niin sen pakkausdimensiolle $\dim_P(A)$ saadaan arvio

$$\dim_P(A) \leq n - c\rho^n,$$

missä $c \in \mathbb{R}$ on ainoastaan dimensiosta n riippuva positiivinen vakio. Tämä arvio puolestaan tarkoittaa muun muassa sitä, että mitä suurempi joukon huokoisuusvakio ρ on sitä kauempana vastaava pakkausdimensio on alkuperäisestä ulottovuudesta n. Siispä mitä suurempia ”reikiä” joukolla on pienillä skaaloilla sitä pienempi on sen dimensio. Itse asiassa vastaavia tuloksia löytyy muillekin edellä mainituille dimensioille. Huokoisten joukkojen pakkausdimensioon liittyvää tutkimusta löytyy lisäksi artikkelista [9]. Vastaavasti huokoisten joukkojen Minkowskin dimensiota on tutkinut A. Sallin artikkelissaan [18] ja Hausdorffin dimensiota P. Mattila artikkelissaan [17].

Tutkimus ei ole rajoittunut vain huokoisiin joukkoihin. Vasta viime aikoina on kehitetty näihin vahvasti liittyvä ns. *huokoinen mitta*, jonka avulla voidaan tarkemmin tutkia huokoisuuden yhteyttä dimensioon. Huokoisen mitan määrittely ja ominaisuuksia löytyy mm. artikkelista [8].

Viitteet

[1] Bottomley, H. *Some nowhere dense sets with positive measure and a strictly monotonic continuous function with a dense set of points with zero derivative*, webartikkeli, 2005, `http://www.btinternet.com/~se16/hgb/nowhere.htm`

[2] De Blasi, F. S.; Myjak, J.; Papini, P. L. *Porous sets in best approximation theory*, J. London Math. Soc. (2), sivut 135 - 142, 1991.

[3] Denjoy, A. *Sur une propriété des séries trigonométriques*, Verlag v.d.G.V. der Wis-en Natuur. Afd. 30, 1920.

[4] Dolženko, E. *Boundary properties of arbitrary functions*, Math. USSR-Izv. 1, sivut 1 - 12, 1967.

[5] Holopainen, I. *Mitta ja integraali*, luentomuistiinpanot, kevät 2004, `http://www.helsinki.fi/~iholopai/MitInt02.pdf`

[6] Holopainen, I. *Reaalianalyysi I*, luentomuistiinpanot, kevät 2004, `http://www.helsinki.fi/~iholopai/ReAn02.pdf`

[7] Holopainen, I. *Moderni reaalianalyysi*, luentomuistiinpanot, syksy 2005, `http://www.helsinki.fi/~iholopai/MoRA.pdf`

[8] Järvenpää, E.; Järvenpää, M.; Eckmann, J. *Porosities and dimensions of measures*, Nonlinearity 13, sivut 1 - 18, 2000.

[9] Järvenpää, E.; Järvenpää, M.; Käenmäki A.; Suomala V. *Asymptotically sharp dimension estimates for k-porous sets*, Math. Scand. 97, sivut 309 - 318, 2005.

[10] Järvenpää, E.; Järvenpää, M.; Käenmäki A.; Rajala, T.; Rogovin, S.; Beliaev, D.; Suomala V. *Packing dimension of mean porous measures*, koevedos 341, Jyväskylän yliopisto, 2007.

[11] Järvenpää, E.; Järvenpää, M.; Käenmäki A.; Rajala, T.; Rogovin, S.; Suomala V. *Small porosity, dimension and regularity in metric measure spaces*, koevedos 356, Jyväskylän yliopisto, 2007.

[12] Käenmäki, A. *Porosity and regularity in metric measure spaces*, Real Analysis Exchange 2007, 31st Summer Symposium Conference, tulossa.

[13] Lehto, O. *Reaalifunktioiden teoria*, LIMES ry, 1975.

[14] Lehtonen, A. *Riemannin integraalista Lebesguen integraaliin*, luentomuistiinpanot, syksy 2007 `http://users.jyu.fi/~lehtonen/opetus/s12007/R2Lint_Cantor.pdf`

[15] Martio, O.; Vuorinen, M. *Whitney cubes, p-capacity, and Minkowski content*, Exposition. Math. 5, sivut 17 - 40, 1987.

[16] Mattila, P. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and rectifiability*, Cambridge University Press, 1995.

[17] Mattila, P. *The Hausdorff dimension of very strongly porous sets in* $\mathbb{R}^n$. Real Analysis Exchange 13, osio 33, 1987.

[18] Salli, A. *On the Minkowski dimension of strongly porous fractal sets in* $\mathbb{R}^n$, Proc. London Math. Soc. (3) 62, sivut 353 - 372, 1991.
[19] Sierpinski, W. *Sur une courbe dont tout point est un point de ramification*, C. R. Acad. Sci. Paris 160, sivut 302 - 305, 1915.
[20] Väisälä, J. *Topologia I*, LIMES ry, 2007.
[21] Zajíček, L. *Porosity and σ-porosity*, Real Analysis Exchange 13, sivut 314 - 350, 1987.